Некоторые задачи Пенлеве-типа для цепочек

На прошлой лекции мы видели, что деформация интегрируемых стационарных уравнений добавлением некоммутативной симметрии разрушает интегрируемость по Лиувиллю и приводит к уравнениям Пенлеве или их обобщениям на более высокие порядки по производным. Аналогичное явление имеет место не только для непрерывных уравнений, но и для цепочек. На этой лекции мы приведем лишь один такой пример, объясняющий происхождение задачи 59. Далее рассмотрим еще один пример для одевающей цепочки, также связанный с уравнениями типа Пенлеве, но основанный на другой идее.

Неавтономное замыкание цепочки Вольтерра

Напомним, что цепочка Вольтерра

$$u_{n,t} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) \tag{1}$$

обладает высшей симметрией

$$u_{n,t_2} = u_n(h_{n+1} - h_{n-1}), \quad h_n := u_n(u_{n+1} + u_n + u_{n-1}).$$

Стационарное уравнение $u_{n,t_2} + cu_{n,t} = 0$, после деления на u_n, принимает вид $h_{n+1} + cu_{n+1} = h_{n-1} + cu_{n-1}$, что равносильно

$$u_n(u_{n+1} + u_n + u_{n-1}) + cu_n + \alpha + (-1)^n\beta = 0, \tag{2}$$

где α и β произвольные постоянные. То есть, стационарное уравнение в данном случае сводится к обыкновенному разностному уравнению второго порядка. Нетрудно проверить, что при этом цепочка (1) сводится к системе ОДУ на любую пару соседних переменных (u_{n-1}, u_n); более того, порядок можно понизить еще на единицу и получить решение через эллиптические функции. Таким образом, здесь ситуация такая же, как при рассмотрении уравнений Новикова для КдФ.

Чтобы испортить интегрируемость, достаточно добавить классическую симметрию растяжения. Заметим, что (1) инвариантна относительно однопараметрической группы

$$\tilde{u}_n(t) = e^a u_n(e^a t),$$

которой отвечает дифференцирование

$$u_{n,\tau_0} = t u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) + u_n.$$

Упражнение. Проверьте непосредственно, что $[D_t, D_{\tau_0}] = 0$, но $[D_{t_2}, D_{\tau_0}] \neq 0$.

Теперь, рассмотрим стационарное уравнение

$$u_{n,t_2} + 2u_{n,\tau_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_n(h_{n+1} - h_{n-1}) + 2(t u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) + u_n) = 0$$

(коэффициент при втором слагаемом фиксируется при помощи растяжения, а член $u_{n,t}$ можно не добавлять, с учётом сдвига $t \to t - \mathrm{const}$). Как и раньше, порядок легко понижается на два и вместо (2) получается разностное уравнение [1]

$$u_n(u_{n+1} + u_n + u_{n-1}) + 2t u_n + n + (-1)^n b + c = 0. \tag{3}$$

Здесь t играет роль параметра и появилась явная зависимость от n. У этого уравнения порядок дальше не понижается. Оно известно как дискретное уравнение Пенлеве dP_1, см. напр. [2]. Как и раньше, цепочка (1) превращается в замкнутую систему на переменные u_{n-1}, u_n, эквивалентную непрерывному уравнению Пенлеве P_4 на переменную $y = u_n$:

$$y'' = \frac{(y')^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 + 4ty^2 + 2(t^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{2y},$$

где $2\alpha = n - 3(-1)^n b + c$, $\beta = -(n + (-1)^n b + c)^2$. Отображение $(u_{n-1}, u_n) \mapsto (u_n, u_{n+1})$, определяемое (3), можно переписать в виде дифференциальной подстановки, действующей на решениях этих уравнений (такие подстановки тоже принято называть преобразованиями Бэклунда, хотя это совсем не то, что было в лекции 9).

Отметим, что этот пример допускает дальнейшие обобщения по той же схеме, что была намечена на прошлой лекции для уравнения КдФ. Цепочка Вольтерра тоже имеет дополнительную некоммутативную алгебру симметрий, которую можно использовать для построения стационарного уравнения. Например, следующая по порядку некоммутативная симметрия имеет вид

$$u_{n,\tau_1} = tu_n(h_{n+1} - h_{n-1}) + u_n\big((n + \tfrac{3}{2})u_{n+1} + u_n - (n - \tfrac{3}{2})u_{n-1}\big)$$

(она даже проще, чем в случае КдФ, так как не содержит нелокальностей. Если вычеркнуть член с t, то получится мастер-симметрия цепочки (1)). Можно проверить, что в этом случае порядок стационарного уравнения также понижается до второго и возникает уравнение P_5, но вычисления в этом случае более сложные.

[1] А.Р. Итс, А.В. Китаев, А.С. Фокас. Изомонодромный подход в теории двумерной квантовой гравитации. *УМН* ***45:6*** (1990) 135–136.

[2] B. Grammaticos, A. Ramani. Discrete Painlevé equations: an integrability paradigm. *Physica Scripta* ***89*** (2014) 038002.

Метод факторизации в квантовой механике

Вернемся к одевающей цепочке (пусть штрих обозначает производную по x)

$$v'_n + v'_{n+1} = v_n^2 - v_{n+1}^2 + \alpha_n - \alpha_{n+1}. \tag{4}$$

На лекции 10 мы строили ее решения, стартуя с достаточно богатого запаса волновых функций для затравочного потенциала. Но можно действовать и наоборот: сначала построить частное решение цепочки, угадав какой-то анзац или наложив некоторую редукцию, а затем по этому решению восстановить потенциалы и в.ф., по формулам

$$-u_n = v_n^2 + v'_n + \alpha_n, \quad \varphi_n^n = e^{\int v_n\,dx}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

В результате, для каждого потенциала будет найдено по одной в.ф., отвечающей значению спектрального параметра $\lambda = \alpha_n$. После этого можно, пользуясь преобразованиями Дарбу, пересчитать их в в.ф. для других потенциалов.

Точнее, при этом используется обратное преобразование Дарбу. Напомним операторную формулировку. Пусть

$$L_n = -D_x^2 - u_n, \quad A_n = D_x - v_n, \quad A_n^+ = -D_x - v_n,$$

тогда преобразование Дарбу можно определить как отображение

$$L_n - \alpha_n = A_n^+ A_n \quad \longrightarrow \quad L_{n+1} - \alpha_n = A_n A_n^+$$

(это объясняет название «метод факторизации»). При этом выполняются соотношения

$$A_n L_n = L_{n+1} A_n, \quad A_n^+ L_{n+1} = L_n A_n^+$$

(операторы A_n, A_n^+ называются сплетающими), из которых следует, что оператор A_n переводит в.ф. L_n в в.ф. L_{n+1}, а A_n^+ действует в обратном направлении.

Отметим, что оператор A_n «уничтожает» φ_n^n, переводя её в 0. Зато оператор A_n^+ «рождает» φ_n^{n+1} при действии на φ_{n+1}^{n+1} (см. диаграмму в лекции 10; там мы шли от левого столбца к диагонали, сейчас наоборот).

Именно так одевающая цепочка и использовалась в квантовой механике для построения точно-решаемых потенциалов [3, 4], еще до приложений в теории солитонов.

Но как найти частное решение (4)? Идея в упомянутых работах была очень простая: будем искать решения, явно указав их зависимость от n, а именно,

$$v_n = (n+c)f + g + h/(n+c). \tag{6}$$

Если $c \in \mathbb{Z}$, то v_{-c} не определено и в этом случае рассматривается только половина цепочки при $n > -c$ или $n < -c$. Для краткости обозначим $m = n + c$. Подстановка в цепочку приводит к формуле

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = (2m+1)(f' + f^2) + 2(g' + fg) + \left(\frac{2}{m+1} - \frac{2}{m}\right) gh +$$
$$+ \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m}\right) h' + \left(\frac{1}{(m+1)^2} - \frac{1}{m^2}\right) h^2.$$

Так как α_n не зависит от x, а функции от m в правой части линейно независимы, то коэффициенты при них должны быть постоянными и на f, g, h получается система

$$f' + f^2 = c_1, \quad g' + fg = c_2, \quad gh = c_3, \quad h^2 = c_4, \quad c_i = \mathrm{const}\,.$$

Как нетрудно видеть, она решается в элементарных функциях, причем имеется довольно много случаев в зависимости от выбора c_i. Параметры α_n и потенциалы u_n имеют вид

$$-\alpha_n = c_1 m^2 + 2c_2 m + 2c_3/m + c_4/m^2, \quad m = n + c,$$
$$u_n = -m(m-1)f' - (2m-1)g' + g^2 + 2fh.$$

Потенциалы получаются не обязательно регулярными на всей оси, среди них есть и полюсные, что отвечает потенциальным ямам на полуоси или на отрезке. Значения α_n определяют, так сказать «алгебраический» спектр, в том смысле, что соответствующие в.ф. находятся явно, в квадратурах. Но, перебор случаев показывает, что они отвечают также и за физический спектр, то есть, это те значения, для которых в.ф. суммируемы. Так что эта кострукция оказалась вполне содержательной с точки зрения квантовой механики. Упрощённая классификация решений приведена в следующей таблице.

	v_n	α_n	u_n
(A)	$\dfrac{d}{\sin(ax+b)} + am\cot(ax+b)$	a^2m^2	$\dfrac{1}{\sin^2(ax+b)}(a^2m(m-1) + d^2 + ad(2m-1)\cos(ax+b))$
(B)	$e^x - m$	$-m^2$	$e^{2x} - (2m-1)e^x$
(C)	$m/x + dx$	$-d(4m+1)$	$m(m-1)/x^2 - 2dm + d^2x^2$
(D)	$-x$	$2n+1$	$x^2 + 2n$
(E)	$am\cot(ax+b) + d/m$	$a^2m^2 - d^2/m^2$	$m(m-1)\dfrac{a^2}{\sin^2(ax+b)} + 2ad\cot(ax+b)$
(F)	$m/x + d/m$	$-d^2/m^2$	$m(m-1)/x^2 + 2d/x$

Тип (A) — сферические гармоники, потенциалы Пёшля–Теллера (здесь и в (E) есть также варианты с гиперболическими функциями), (B) — потенциал Морзе, (C) и (D) — гармонические осцилляторы на полуоси и оси, (E) — потенциалы Маннинга–Розена, (F) — задача Кеплера. Следует учесть, что кроме целочисленного параметра n, определяющего энергетические уровни α_n, здесь возможно ещё квантование некоторых входящих в потенциалы параметров, так что картина более сложная и богатая, чем кажется на первый взгляд. Детальный анализ можно найти в [4].

Важно отметить следующее обстоятельство: редукция (6) *не согласована* с динамикой по t в силу уравнения КдФ (или других уравнений из иерархии). Конечно, мы можем принять получающиеся функции u_n в качестве начальных условий для КдФ и запустить эволюцию по t. При этом будут получаться какие-то решения КдФ и, более того, они по прежнему будут связаны преобразованиями Бэклунда. Но, при $t \neq 0$ они уже не будут описываться формулой (6), в этом можно убедиться, дифференцируя ее в силу уравнений мКдФ для v_n.

Гармонический осциллятор (D) отвечает простейшему решению цепочки (4), в котором все v_n совпадают, то есть, это неподвижная точка преобразования Дарбу. В следующем разделе мы рассмотрим дальнейшее обобщение этого случая.

[3] E. Schrödinger. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc. Roy. Irish Acad.* ***A 46*** (1940/1941) 9–16. [перевод: Э. Шредингер, Избранные труды по квантовой механике, М.: Наука, 1976]

[4] L. Infeld, T.E. Hull. The factorization method. *Rev. Modern Phys.* **23:1** (1951) 21–68. [сб. переводов “Математика” **10:3** (1966) 39]

Квазипериодическое замыкание одевающей цепочки

Рассмотрим, вслед за [5], периодические орбиты преобразования Дарбу. Условие

$$v_{n+N} = v_n$$

превращает (4) в конечномерную динамическую систему на $v_1, \dots, v_N$. При этом

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \alpha_{n+N} - \alpha_{n+N+1} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n - \alpha_{n+N} = \delta = \mathrm{const}\,.$$

Оказывается, что при $\delta = 0$ (периодическое замыкание) и $\delta \neq 0$ (квази-периодическое замыкание) свойства системы резко отличаются. Напомним, что одевающая цепочка эквивалентна матричному уравнению (представление нулевой кривизны)

$$A'_n = U_{n+1}A_n - A_nU_n, \quad U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_n - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} -v_n & 1 \\ v_n^2 + \alpha_n - \lambda & -v_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда для произведения любого числа матриц A_n следует

$$(A_{n+k} \cdots A_n)' = U_{n+k-1}A_{n+k} \cdots A_n - A_{n+k} \cdots A_nU_n.$$

В периодическом случае имеем $U_{n+N} = U_n$ и выполняется уравнение Лакса

$$V'_n = [U_n, V_n], \quad V_n = A_{n+N-1} \cdots A_n,$$

с полиномиальной по λ матрицей V_n. Это в точности уравнение для стационарных высших симметрий уравнения КдФ (уравнения Новикова, см. лекцию 8), просто сейчас мы работаем в других переменных и имеем матрицу V_n в факторизованном виде. Из уравнения Лакса следует, что коэффициенты по λ от $\operatorname{tr} V_n$ являются первыми интегралами и, если все аккуратно сделать, можно показать, что система интегрируема по Лиувиллю. В [5] можно посмотреть описание бигамильтоновой структуры для этого случая. В частности, при $N = 3$ и $N = 4$ система интегрируется в эллиптических функциях.

Если же $\delta \neq 0$, то $u_{n+N} = u_n + \delta$, матрицы U_{n+N} и U_n не совпадают, уравнение Лакса портится и первые интегралы пропадают. Выживает лишь один, самый простой первый интеграл, и то он становится неавтономным:

$$v_{n+1} + \cdots + v_{n+N} = \frac{\delta}{2}(x - x_0).$$

Также теряется совместность с уравнением КдФ (как и в предыдущем разделе). Действительно, эволюция по t описывается уравнениями мКдФ $v_{n,t} = v_{n,xxx} - 6(v_n^2 + \alpha_n)v_{n,x}$. Так как в них явно входит α_n, то уравнения для v_n и v_{n+N} не совпадают, поэтому связь $v_n = v_{n+N}$ сразу разрушается при эволюции по t.

Простейший нетривиальный случай отвечает $N = 3$. Удобно обозначить $y_n = v_n + v_{n+1}$, $\delta_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$ и принять нормировку $\delta = -2$, $x_0 = 0$ (что не снижает общности). Тогда получаем систему

$$\begin{cases} y_1' = y_1(y_3 - y_2) + \delta_1, \\ y_2' = y_2(y_1 - y_3) + \delta_2, \\ y_3' = y_3(y_2 - y_1) + \delta_3, \end{cases} \qquad y_1 + y_2 + y_3 = -2x, \quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -2. \tag{7}$$

Исключим y_3 при помощи первого интеграла:

$$y_1' = -y_1(y_1 + 2y_2 + 2x) + \delta_1, \quad y_2' = y_2(2y_1 + y_2 + 2x) + \delta_2.$$

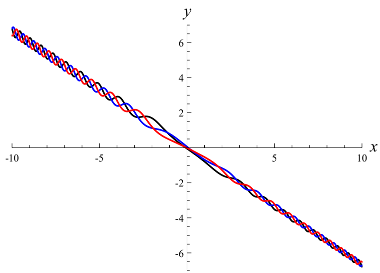
Из первого уравнения выразим y_2 и подставим во второе, в результате на функцию $w = y_1 = -x - v_3$ получается уравнение P_4 (как и в примере с цепочкой Вольтерра, с которого мы начали)

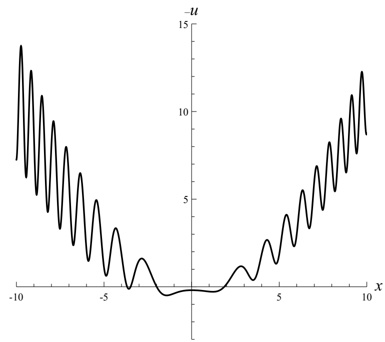
$$w'' = \frac{w'^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4xw^2 + 2(x^2 - a)w + \frac{b}{w}, \qquad a = \delta_2 + \delta_1/2 + 1, \quad b = -\delta_1^2/2.$$

Системy (7) можно рассматривать как симметричную запись этого уравнения.

Общее решение P_4 зависит от 4 параметров (a, b и два начальных условия), вообще говоря, комплексных. При некоторых специальных значений этих параметров решение может быть рациональной функцией или выражаться, как рациональная функция от функций Эрмита, но, в случае общего положения это некоторая новая спец-функция.

Если рассматривать лишь вещественные решения, то в пространстве параметров и начальных условий можно найти некоторую конечную область, отвечающую регулярным решениям (без полюсов на вещественной оси). При этом, все $\delta_n < 0$, функции v_n имеют линейный рост по x, а потенциал $-u_n$ квадратичный, как в случае гармонического осциллятора, но теперь на него накладываются высокочастотные осцилляции. Типичное решение выглядит так:





Численные эксперименты показывают, что такое качественное поведение наблюдается при всех нечётных N. Для чётных N всё немного усложняется, из-за того, что матрица при производных в (4) вырождена. Тем не менее, этот случай также приводит к уравнениям типа Пенлеве (в частности, $N = 4$ тоже сводится к уравнению второго порядка, а именно, P_5). При чётных N решение имеет неподвижную особую точку при $x = 0$ и соответствующие операторы Шрёдингера следует рассматривать на полуоси.

Согласно общей схеме, функция $\varphi_n^n = e^{\int v_n dx}$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера с потенциалом $-u_n$, при $\lambda = \alpha_n$. Эта функция не имеет нулей и является быстроубывающей, благодаря линейному росту v_n. Следовательно это основное состояние для L_n. Пересчитывая эти функции при помощи операторов A_k^+, получаем собственные функции для любого из потенциалов $-u_1, \dots, -u_N$. При этом собственнные значения для $-u_n$ образуют возрастающую последовательность

$$\alpha_n,\ \alpha_{n+1},\ \dots,\ \alpha_{n+N-1},\ \alpha_n - \delta,\ \alpha_{n+1} - \delta,\ \dots,\ \alpha_{n+N-1} - \delta,\ \dots,$$

то есть, спектр оператора Шрёдингера состоит из N арифметических прогрессий с шагом $-\delta$ (в другую сторону последовательность тоже можно продолжить, если использовать присоединенные функции, но они не будут собственными).

На этом примере мы видим, что возможна ситуация, когда квантово-механическая задача является точно-решаемой в том смысле, что спектр допускает явное описание, но при этом сам потенциал и собственные функции выражены через некоторые трансцендентные функции.

[5] А.П. Веселов, А.Б. Шабат. Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шредингера. *Funct. Anal. Appl.* **27:2** (1993) 1–21.